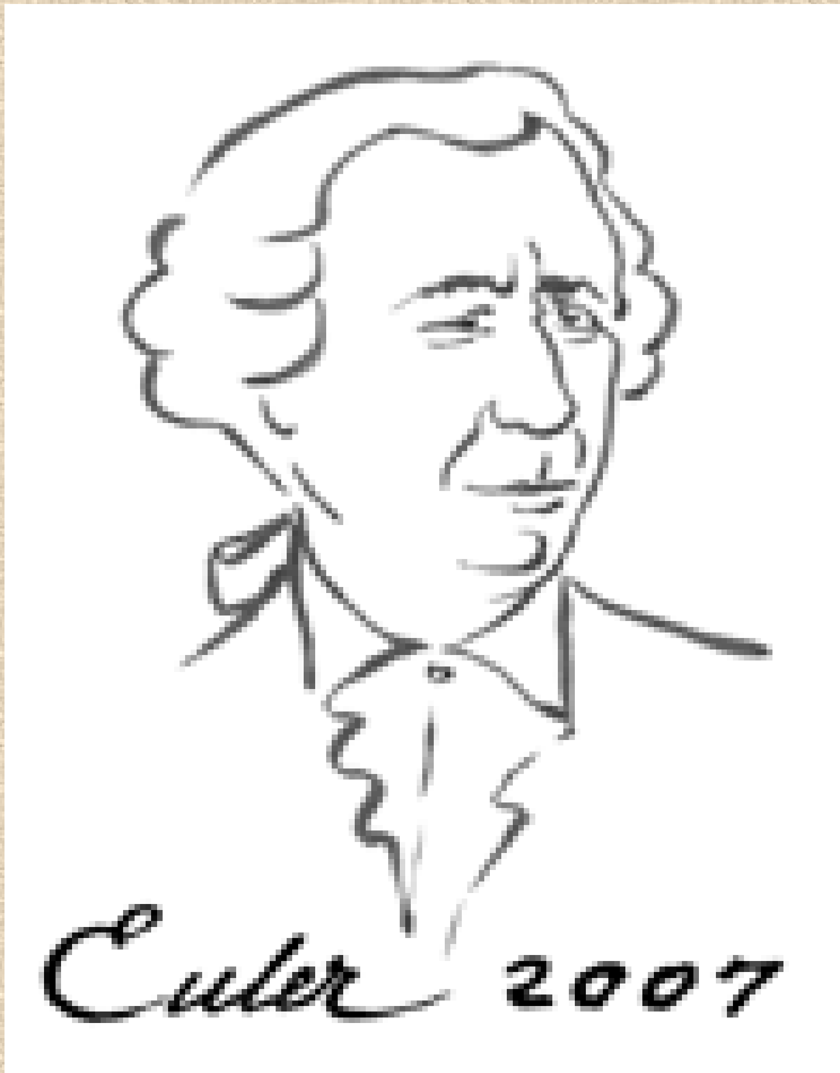
TRICENTENARIO DEL NACIMIENTO DE LEONHARD EULER (1707-1783)



Euler y el principio de mínima acción

Luis Navarro Veguillas
Departament de Física Fonamental
Universitat de Barcelona

luis.navarro@ub.edu

1.- Leonhard Euler (1707-1783): una ligera ojeada a su vida y a su obra, incluida su física.

2.- Antecedentes del principio de mínima acción: las aportaciones de Fermat, Leibniz y Mapertuis.

3.- La formulación de Euler y sus primeras aplicaciones, en el "Additamentum II", de 1744.

4.- Sobre paternidades y otras cuestiones:
- El caso König.
- Maupertuis y Euler.
- Complementos varios.

Basilea 1707 — **San Petersburgo** 1727 — **Berlín** 1741 — **San Petersburgo** 1766 — 1783

1720--24 Universidad de Basilea
Maestría en Artes

1726 “Constructio linearum isochronarum
in medio quocunque resistente”

1727 Ni trabajo, ni premio (accésit).

1731 Profesor de física
(Academia de S. P.)

1734 Se casa con
Katherina Gsell

1736 *Mechanica*
sive motus...

1744 *Methodus*
inveniendi
lineas curvas

1748 *Introductio*
in analysin
infinitorum

1755 *Intitutiones*
calculi differentialis

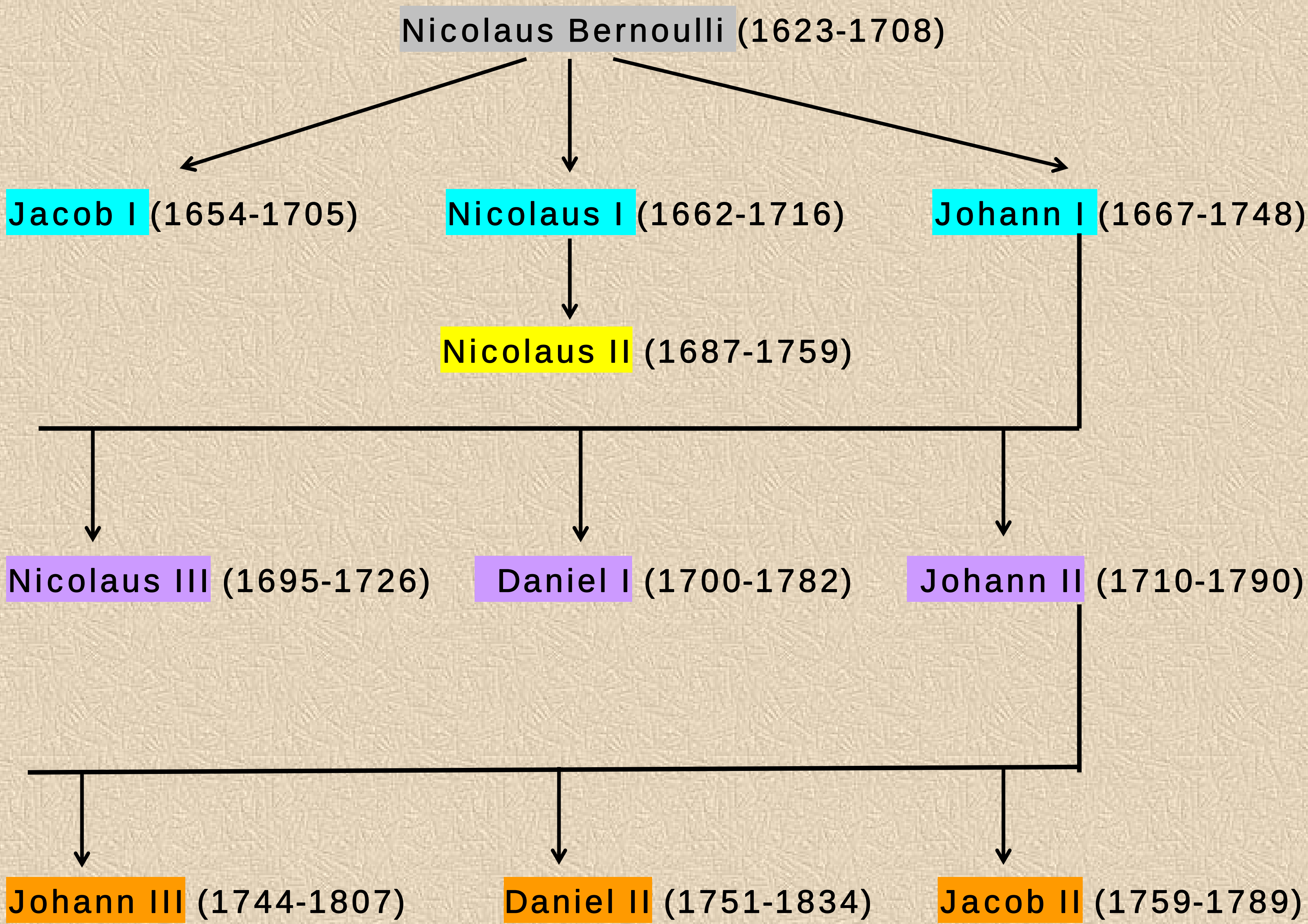
1768 - *Lettres* (234) *á une*
Princesse d’Álemagne
- *Intitutionis calculi*
integralis

1772 *Theoria*
motuum
lunae

Basilea, 1707-1727 (Padres: Paul Euler y Margaretha Brucker)

13	- Ingresa en la Universidad de Basilea. Tres años después: graduado (filosofía). No prosiguió estudios de teología. - Johan I Bernoulli: matemáticas. Sábados tarde, más...
19	- Tras decantarse por las matemáticas, presenta su primer trabajo científico: una nota sobre curvas isocronas.
20	- Accésit a un premio de la Academia de Ciencias de París (luego lo ganaría en doce ocasiones): diseño de mástiles. - Dificultades para situarse. Oportunidad en la Academia de Ciencias de San Petersburgo (creada en 1725). Acepta un puesto como profesor de ¡fisiología! (Junto a Nicolaus III y Daniel I, hijos de Johann I). - Se interesó por la aplicación de los métodos de las matemáticas y de la mecánica a «su» nueva disciplina.

Aunque abandonó formalmente sus estudios humanísticos, contra el deseo paterno inicial, siempre mantuvo el interés y el contacto, con el mundo de la filosofía y con sus vicisitudes.



Nicolaus Bernoulli (1623-1708)
Jacob I (1654-1705)
Nicolaus I (1662-1716)
Johann I (1667-1748)
Nicolaus II (1687-1759)
Nicolaus III (1695-1726)
Daniel I (1700-1782)
Johann II (1710-1790)
Johann III (1744-1807)
Daniel II (1751-1834)
Jacob II (1759-1789)

San Petersburgo (I) , 1727-1741

24	- Cuatro años después de llegar: profesor de física (ACSP).
26	- Sucede a Daniel I, como profesor de matemáticas (ACSP).
27	- Se casa con Katharina Gsell. (13 hijos; 5 llegan a adultos).
29	- Publica su primer gran tratado (1736, 2 vols.): *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*. En él aplica el análisis infinitesimal al estudio del movimiento.
31	- Pierde la visión de su ojo derecho.
32	- Aparece su *Ensayo de una nueva teoría de la música*, de gran éxito durante el siglo XIX, entre músicos y artesanos.
33	- Federico II, “el Grande”, accede al trono de Prusia (1740). Decide revitalizar la Sociedad de Ciencias de Berlín, fundada por Leibniz en 1700 y un tanto abandonada. - Invitación a Euler para colaborar en la empresa.
34	- Euler acepta y se traslada a Berlín; llega el 25 de julio.

Aunque los trabajos se publicaran más tarde, una gran parte de los gérmenes y primeros desarrollos están localizados en esta época.

Golpe de Estado en Rusia,1741

Ana Leopoldovna regente,
con su hijo Iván VI

Isabel I, con la que comienza una época de
influencia cultural francesa

Berlín, 1741-1766

34	- En Rusia, Isabel I accede al trono mediante un golpe de estado: la influencia francesa reemplaza a la alemana. - Euler deja un país en crisis, según sus propias palabras.
37	- Publica *Methodus inveniendi lineas curvas*... (1744). - Refundación, por el rey Federico II, de la de Berlín: "Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlín". (Oficialidad del francés; ni alemán, ni latín).
39	- Maupertuis es nombrado presidente de la Academia de Berlín y Euler director de su Sección Matemática.
41	- Publica *Introductio in analysin infinitorum*. - Publica *Réflexions sur l'espace et le temps*.
44-45	- Polémica con König acerca de prioridad (entre Leibniz y Maupertuis) en torno al principio de mínima acción.
48	- Publica *Institutiones calculi differentialis*. Lagrange anuncia a Euler su nuevo cálculo de variaciones.

52	- **Muere Maupertuis y Euler pasa a dirigir la Academia de Berlín, aunque bajo la supervisión directa de Federico II.** - **Primeras desavenencias entre ambos.**
57	- **Finaliza "Elementa calculi variationum" y "Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum"; ambos trabajos se publicarán dos años después.**
58	- **Publica *Theoria motus corporum solidorum...*, a veces conocida como «la Segunda Mecánica de Euler».**
59	- **La enemistad con el rey (que deseaba sustituirle por D'Alembert en la presidencia de la Academia) llevó finalmente a Euler a regresar a San Petersburgo, aprovechando los estrechos lazos personales y académicos que siempre mantuvo.**

Durante su estancia en Berlín (25 años), Euler preparó cerca de 300 publicaciones. Además se involucró en: burocracia, filosofía, tecnología (naval, hidráulica, balística, óptica, etc.), asesorías (lotería del estado, pensiones de viudedad, seguros de diferente índole), etc.

San Petersburgo (II) , 1766-1783

59	- El 28 de julio Euler llega a San Petersburgo. (Catalina II, "la Grande", llevaba cuatro años en el trono de Rusia).
61	- Publica *Lettres á une princesse d'Alemagne...* (234) y también *Institutionis calculi integralis*
62-64	- Completa la edición de *Dioptrica* (3 vols.).
64	- Euler queda definitivamente ciego. (Tuerto a los 31 años).
65	- Publica *Theoria motuum lunae* (¡775 páginas!).
66	- Publica *Thèorie complette de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux*. - Muere su esposa Katharina.
69	- Segundo matrimonio de Euler. Se casa con Salome Abigail Gsell, hermanastra de su primera mujer.
76	- Muere —de infarto, en su casa— el 18 de septiembre.

A pesar de la ceguera y achaques varios, Euler "murió con las botas puestas": calculando la órbita de Urano.

Otros detalles acerca de Euler

- **Sobre su memoria: *La Eneida* (en latín), los 100 primeros primos, sus potencias (hasta la sexta), etc.**
- **Sobre su voluntad: durante su segunda estancia en S. P. (casi toda ella ciego), "escribió" más de la mitad de su obra.**
- ***Opera Omnia*: 76 volúmenes, desde 1911 (Birkhäuser).**
  - **Series prima: *Opera Mathematica* (29 volúmenes).**
  - **Ser. secunda: *Opera Mechanica et Astronomica* (31 vols.).**
  - **Ser. tertia: *Opera Physica. Miscellanea* (12 vols.).**
  - **Ser. quarta A: *Commercium Epistolicum* (4 de 10 vols.).**
  - **Ser. quarta B: *Manuscripta* (pendiente).**

Aproximadamente la cuarta parte de todos los trabajos sobre matemáticas y física del siglo XVIII ¡son de Euler!

[*Clifford Truesdell*]

ALGUNAS APORTACIONES MATEMÁTICAS DE EULER

Análisis	- Sobre funciones: concepto, clases, etc. - Sobre los infinitos (grandes y pequeños). - Tal vez el que en mayor medida desarrolló e impulsó el cálculo de variaciones. - Ecuaciones diferenciales. - Funciones de variable compleja. - Funciones especiales (función gamma, p. ej.).
Teoría de números	- Sumas de series infinitas. - Demostración del teorema *menor* de Fermat. (Si p es primo y a natural, $a^p - a$ es divisible por p). - Propiedades de la *función de Euler* $\varphi(n)$. - Criterios para la determinación de primos grandes. - Tratamiento de ecuaciones diofánticas. - Productos infinitos y series: aplicaciones.

Álgebra	- Uno de los primeros intentos por demostrar el teorema fundamental del álgebra. (Gauss, 1798). - Métodos numéricos para resolver ecuaciones. - Búsqueda de soluciones mediante radicales para ecuaciones de grado superior a cuatro.
Geometría	- Trigonometría sobre una superficie esférica. - Estudio de superficies: geodésicas, curvatura, etc. - De los primeros (¿el primero?) en ocuparse de problemas topológicos (puentes de Königsberg). - Poliedros (*fórmula de Euler*: C+V-A=2).
Varios	- Número *e*, base de los *logaritmos naturales*. - Letras y paréntesis para funciones: $y = f(x)$. - Convenciones para funciones trigonométricas. - Signos para diferencias finitas (Δx, $\Delta^2 x$, ...) y para sumas ($\sum$). - Letra *i* para $\sqrt{-1}$.

Euler y la física

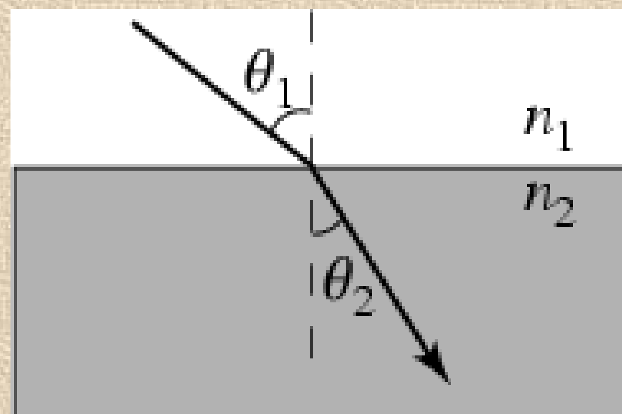
Mecánica	- Desarrolla la mecánica newtoniana, con nuevos métodos analíticos e introduciendo su concepto de “masa puntual”, en lugar del “átomo”. - Análisis de rotaciones y de los movimientos más generales de los sólidos (“ángulos de Euler”). - Primera teoría matemática de la elasticidad: “fórmula de Euler” (carga crítica de una columna).
Hidro-dinámica	- Teoría general de la hidrodinámica, incluyendo el equilibrio hidrostático y sus aplicaciones navales. - Aplicaciones hidráulicas: máquinas, turbinas, etc.
Astro-nomía	- Estudios sobre mecánica celeste (varios premios). - En particular: soluciones aproximadas para el “problema de tres cuerpos” y desarrollos perturbativos. - Naturaleza física del Sol, planetas, cometas, etc.

Otros temas	- Rechaza las bases de la filosofía newtoniana, aunque no el formalismo. Por ejemplo: admite la ley de la gravitación universal, pero no el espacio vacío, el átomo, ni la “acción a distancia”. - Una consecuencia: existencia de un *éter cósmico*, cuya naturaleza y comportamiento Euler intenta descifrar en numerosos trabajos. - Ese éter bien podría ser la clave para relacionar diferentes tipos de fenómenos (luz, electricidad, magnetismo, gravitación, calor...), llegando a sugerir los remolinos de éter como responsables del magnetismo. [Estas ideas fueron parcialmente incorporadas a la física por Faraday y Maxwell]. - Elabora una *Óptica* propia, no newtoniana (corpuscular): luz asociada a oscilaciones del éter. - Sienta las bases del cálculo de sistemas ópticos, tratando de eliminar la aberración óptica.

El nombre de Euler se ha empleado en muchos bautizos

Ángulos de E – Círculo de E – Circuito de E – Característica de E – Constante de E-Mascheroni – Línea de E – Punto de E – Números de E – Triángulo de E – Primera integral de E (función beta) – Segunda integral de E (función gamma) – Polinomios de E – Función *fi* de E – Identidad de E – Fórmula de E – Fuerza de E (carga crítica) – Fórmula de E-Maclaurin – Ecuación de E (cálculo variacional) – Ecuación de E (ecuaciones diferenciales) – Ecuación de E (hidrodinámica) – Ecuación de E (sólido rígido) – Ecuación de E (geometría diferencial) – Multiplicador de E – Teorema de adición de E para integrales elípticas – Criterio de E – Teorema de Fermat-E – Ecuaciones de E-Lagrange – Teorema de E sobre cuatro puntos alineados – Fórmula de E para poliedros (C+V-A=2) – Teorema de E acerca de giros de sistemas de referencia – Teorema de E para un triángulo [$D^2 = R\,(R-2r)$, siendo R y r los radios de las respectivas circunferencias circunscrita e inscrita, y D la distancia incentro-circuncentro] –…

Antecedentes del *principio de mínima acción*



$$n_1 \cdot \operatorname{sen} \vartheta_1 = n_2 \cdot \operatorname{sen} \vartheta_2$$

$$\frac{\operatorname{sen} \vartheta_1}{\operatorname{sen} \vartheta_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \vartheta_1}{\operatorname{sen} \vartheta_2} = (cte.)_{1,2}$$

- Desde antiguo: era familiar la “preferencia” de la Naturaleza por los caminos mínimos. (Reflexión de la luz, Herón, siglo I).
- Willebrord Snell (1580-1626) —Snellius— obtiene empíricamente, en 1621, la ley de la refracción de la luz. [Dudas: ¿Ibn Sahl, 984?]

- René Descartes (1596-1650) admite causas mecánicas; ¡no finales! A partir de choques entre partículas de luz y obstáculos (las del medio), justifica (1637) las dos leyes para la propagación de la luz. En las teorías corpusculares —Newton también, *Opticks*, 1704—, resulta que la luz viaja más aprisa en los medios más densos. [Huygens, en su *Dioptrica* (1703), afirma que Descartes, contra una opinión extendida, no es el padre de la ley; sólo un hábil difusor].
- Pierre de Fermat (1601-1665) las deduce, en 1662, admitiendo que la luz se desplaza por trayectos que recorre en "tiempo mínimo", lo que equivale a "distancia mínima", si sólo hay un medio. Una consecuencia: la luz viaja más despacio en un medio más denso.
- Wilhelm von Leibniz (1646-1716), cree reconciliables los métodos basados en causas eficientes y en causas finales. En esta línea, recupera resultados de Descartes sobre la refracción, a partir de un oscuro principio que impone el "camino más simple" (1682): Suma de (resistencia del medio x distancia recorrida) = Mínimo. Obtiene: mayor velocidad en medios más resistentes, como Descartes...

Pierre de Fermat (1601-1665)

Wilhelm von Leibniz (1646-1616)

Nacimiento del *principio de mínima acción* (PMA)

- **Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759)**

- Interesado por la música primero, y luego por las matemáticas, fue elegido miembro de la Academia de Ciencias de París en 1723.

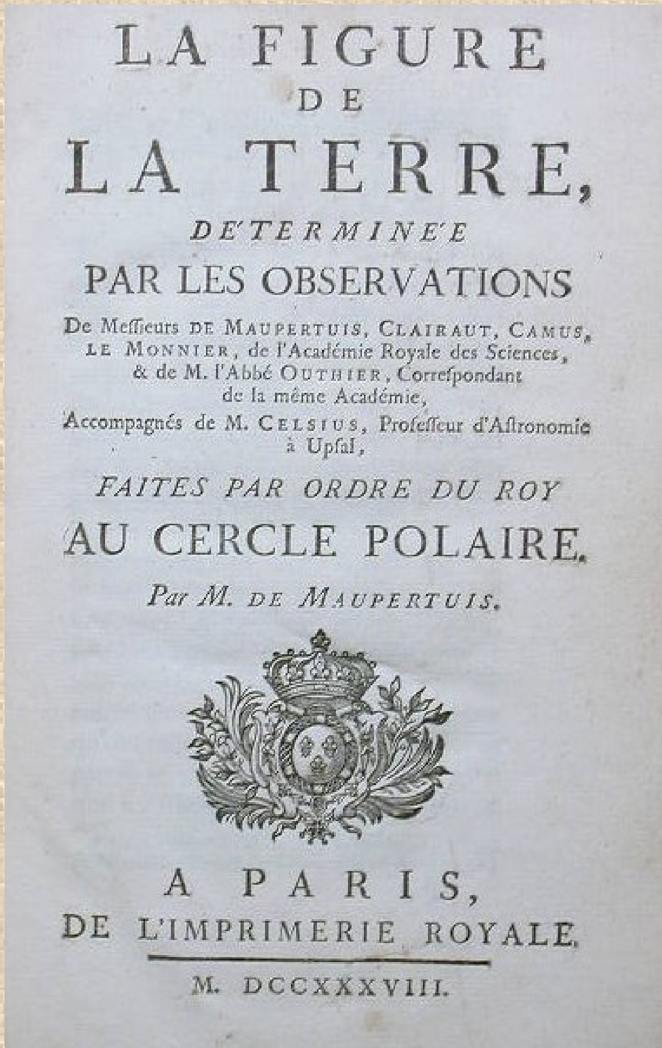
- En 1728, tras una estancia en Londres, se adhiere al newtonianismo, para ser su máximo valedor en Francia. Introdujo en la nueva doctrina a la Marquesa de Châtelet y a Voltaire, entre otros.

- Varias contribuciones —aplicando ideas newtonianas— acerca de la determinación de la forma y el tamaño de la Tierra.

- En esta línea, en 1736 dirigió una expedición a Laponia, tratando de medir la longitud de un grado de meridiano terrestre, con objeto de contribuir a la determinación de la forma de la Tierra.

- En 1746, bajo los auspicios de Voltaire, Federico II nombra a Maupertuis presidente de la Academia de Ciencias de Berlín, con Euler como director de la Sección Matemática.

[Otros expedicionarios: Clairaut, Camus, Le Monnier y Celsius].



LA FIGURE
DE
LA TERRE,
DÉTERMINÉE
PAR LES OBSERVATIONS
De Messieurs DE MAUPERTUIS, CLAIRAUT, CAMUS, LE MONNIER, de l'Académie Royale des Sciences, & de M. l'Abbé OUTHIER, Correspondant de la même Académie,
Accompagnés de M. CELSIUS, Professeur d'Astronomie à Upsal,
FAITES PAR ORDRE DU ROY
AU CERCLE POLAIRE.
Par M. DE MAUPERTUIS.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DCCXXXVIII.

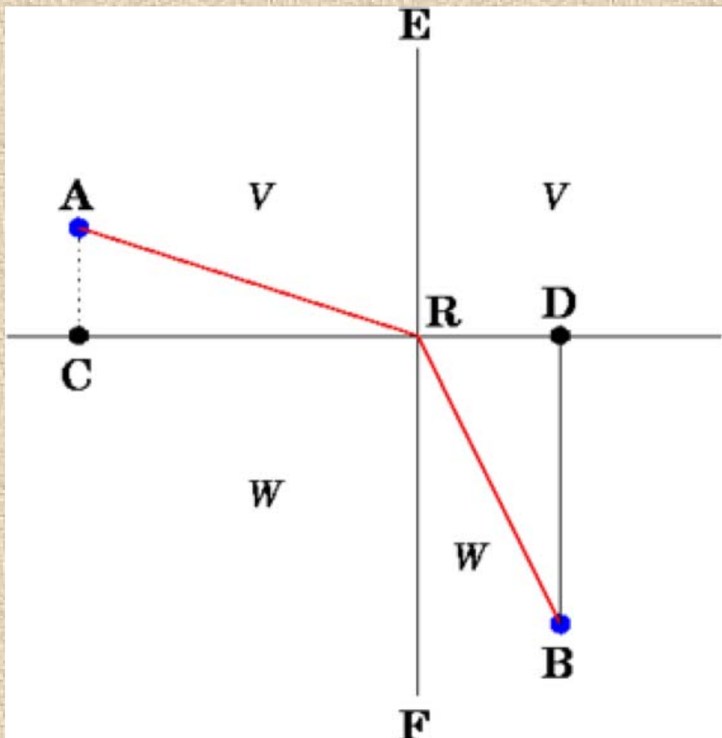
Maupertuis en Laponia
(Grabado de J. Ansseau,
reproducido en *Vie de Savants Ilustrés*, L. Figuer, 1866)

- **La formulación de Maupertuis del PMA, en 1744**

En «Accord de différentes lois de la nature, qui avoient jusqu'ici paru incompatibles», (Academia de Ciencias de Paris, 1744):

- Critica a Descartes por admitir en su deducción de la ley de la refracción que la luz se comporta como una bala en su viaje. También a Fermat (y Leibniz, ¡ambos en el mismo saco!), por admitir que la luz viaja más lentamente en un medio más denso, contra "lo establecido", con lo que su edificio se viene abajo: la luz no sigue el camino más corto, ni tampoco el de menor tiempo.
- Establece un *principio de mínima acción*: la luz sigue trayectorias que hacen mínima la *acción*, definida como la suma de los productos de la distancia recorrida en cada medio por la correspondiente velocidad.
- Así, se adhiere a la filosofía de las causas finales: a pesar de «...la répugnance que plusieurs Mathématiciens ont pour las *Causes finales* appliqués a la Physique ... on ne peut pas douter que toutes choses ne soient réglées par un Être suprême ... ».

PMA y ley de la refracción de la luz (Maupertuis, 1744)



V: velocidad en el medio superior.
W: velocidad en el medio inferior.
El rayo sale de A y llega a B.
Problema: determinar R.

- Acción: $V \cdot AR + W \cdot RB$, equivalente a

$$V\sqrt{AC^2 + CR^2} + W\sqrt{BD^2 + (CD - CR)^2}$$

- Mínimo: derivando con relación a *CR*, siendo AC, BD y CD constantes, Maupertuis obtiene:

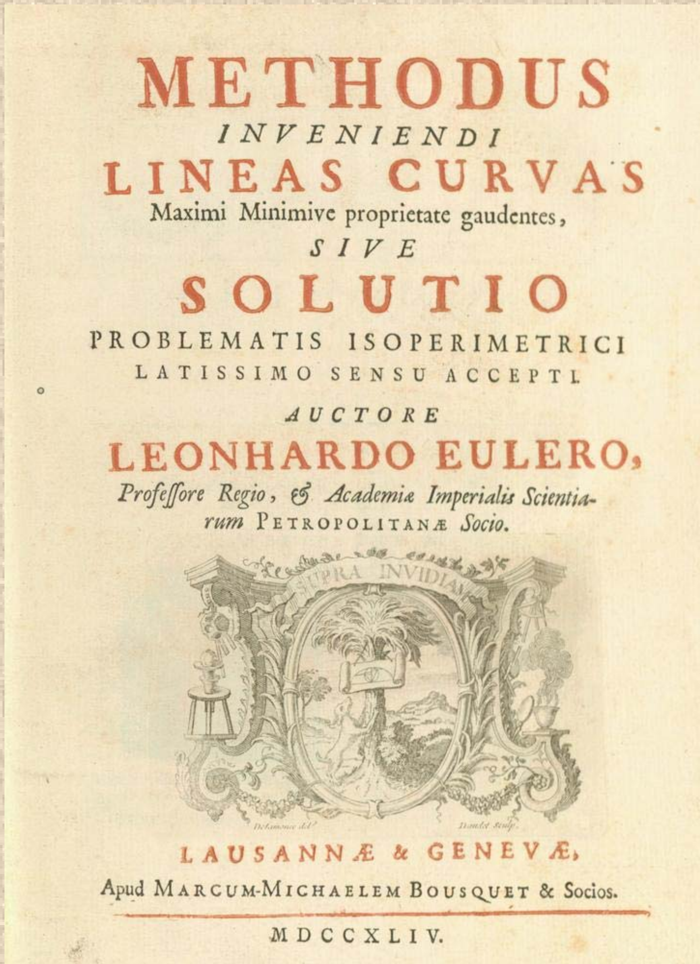
$$\frac{V \cdot CR \cdot dCR}{\sqrt{AC^2 + CR^2}} - \frac{W \cdot (CD - CR) \cdot dCR}{\sqrt{BD^2 + DR^2}} = 0$$

- Que conduce a $\frac{V \cdot CR}{AR} = \frac{W \cdot DR}{BR}$, equivalente a

$\frac{\text{sen}(ARE)}{\text{sen}(FRB)} = \frac{W}{V}$, que implica mayor velocidad de la luz en medios "más densos" (contra Fermat).

Euler entra en el escenario del PMA, 1744, con su *Método para hallar líneas curvas que gocen de una propiedad de máximo o de mínimo, o solución del problema isoperimétrico tomado en sentido latísimo*

- A finales del 1744, aparece el *Methodus...* acerca del cálculo de variaciones: "Una de las más bellas obras de matemáticas que jamás se hayan escrito", según su editor para *Opera Omnia*, C. Carathéodory, 1946.
- Aquí el *Additamentum II* (9/323 pp.): contiene la primera formulación de un *principio de mínima acción* general (no sólo para la luz), que se aplica al estudio de las trayectorias descritas bajo la influencia de fuerzas centrales.



Contenido del *Additamentum II*, subtitulado:

Sobre la determinación del movimiento de los proyectiles en un medio no resistente, por el método de máximos y mínimos

- De partida admite: «Puesto que todos los efectos de la naturaleza obedecen a una ley de máximo o mínimo, no cabe duda de que también en las trayectorias curvas que los proyectiles describen... hay alguna propiedad que se hace máxima o mínima». [¿Cuál?].
- Método: resolver el problema con el *método directo* (p. ej. Newton) y, «con la debida atención», descubrir cuál es esa propiedad.
- Un principio, sin nombre propio específico: con M (masa puntual), $\sqrt{v}$ (velocidad), $\mathrm{d}s$ (trayecto en $\mathrm{d}t$), $M\sqrt{v}$ (cantidad de movimiento) y $M\,\mathrm{d}s\sqrt{v}$ («movimiento colectivo del cuerpo a lo largo del pequeño espacio $\mathrm{d}s$», Euler comienza enunciando:

«Entonces, digo que la trayectoria descrita por el cuerpo ha de estar dispuesta de tal manera que $M\,\mathrm{d}s\sqrt{v}$, o bien $\mathrm{d}s\sqrt{v}$ si M es constante, ha de ser mínimo entre todas trayectorias contenidas entre los mismos extremos».

- También lo enuncia en términos de la «fuerza viva» v, siendo dt el «corto tiempo» en el que se recorre el elemento ds:

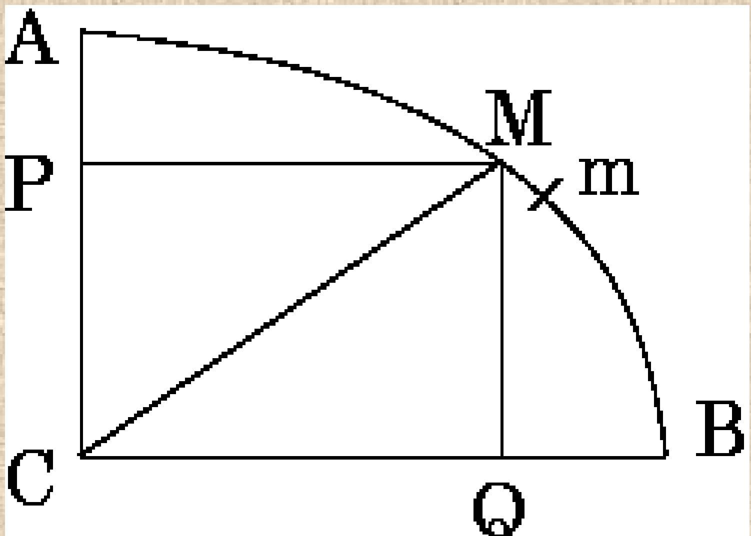
$$\int \mathrm{d}s\,\sqrt{v} = \int v\,\mathrm{d}t$$ (que es la suma de todas las fuerzas vivas en cada uno de los instantes de tiempo) ha de ser un mínimo.

Así «ni los que establecen que las fuerzas han de estimarse mediante las velocidades mismas, ni aquellos que establecen que han de estimarse por sus cuadrados encontrarán aquí nada que objetar».

- Para comprobar la validez del enunciado Euler analiza diversos casos, de generalidad y complicación crecientes.

1.- Ausencia de fuerzas. v = cte. y el principio de mínimo conduce a espacio o tiempo mínimo; es decir, a trayectorias rectas.
2.- Caída; es decir, aceleración «normal al horizonte» y constante.
3.- Caída con aceleración de la gravedad dependiente de la altura.
4.- «Caída» con aceleración variable en cada punto de un plano.
5.- Movimiento debido a fuerzas centrales.

Como ejemplo de tratamiento, veamos el correspondiente a 2.



- Lanzamiento horizontal desde A, «solicitado hacia abajo por una fuerza aceleratriz constante igual a *g*».
- Abscisa: AP = *x*, ordenada: PM = *y*.
- «Elemento de curva»: Mm = d*s*.

Punto de partida: $\mathrm{d}v = \mathrm{d}u^2 = \mathrm{d}(2gx) = 2g\,\mathrm{d}x$

De la última, $v = a + g\,x \Rightarrow$ "La curva tiene que estar dispuesta" a que

$\int \mathrm{d}s\,\sqrt{a + g\,x}$ sea un mínimo para ella.

- Este tipo de problemas —curvas para las que una cierta magnitud adquiere el mínimo valor— ha sido tratado y resuelto con gran generalidad en las páginas anteriores de su *Methodus*...

En este caso concreto la solución resulta ser: $y = \dfrac{2}{g}\sqrt{C\left(a - C + gx\right)}$,

- «Es manifiesto –continua escribiendo Euler— que esta ecuación es la de una parábola», con tangente horizontal en el punto A.

- Si se toma A como origen de coordenadas ($C = a$), resulta

$$y = \frac{2}{g}\sqrt{a\,g\,x} = 2\sqrt{\frac{a\,x}{g}},$$ (donde es fácil comprobar que $a = v_0 = u_0^{2}$).

- Euler concluye el apartado así: «Todo es como resulta de la teoría del movimiento de los proyectiles por el método directo», que es su forma de referirse a los procedimientos introducidos por Galileo (cinemático) y Newton (dinámico).

- A esta misma conclusión llega en los apartados 3-4-5.

- Finalmente: los casos tratados «muestran brillantemente la conformidad del principio que aquí hemos establecido con la verdad. Pero, si esta conformidad se verifica también en casos más complicados, resulta dudoso. Por consiguiente hay que investigar más diligentemente cuán general es este principio, para que no se le atribuya más de lo que su naturaleza permite».

- El *Additamentum* acaba con la demostración de que el principio proporciona los resultados correctos (los que se obtienen mediante el método directo) *sii* la expresión diferencial de la *fuerza viva* se puede escribir en la forma: $\mathrm{d}v = \mathrm{T}(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{d}x + \mathrm{V}(x, y)\mathrm{d}y$, equivalente, en terminología actual, a que la fuerza derive de un potencial.

- Para presentar el mismo resultado de una forma más intuitiva, Euler distingue entre dos tipos generales de movimientos:
  - Aquellos en los que la velocidad depende sólo de la posición (se recupera la velocidad al volver a pasar por un mismo sitio), como es el caso de los debidos a fuerzas centrales, por ejemplo.
  - Aquellos en los que la velocidad no queda determinada por la posición, como, por ejemplo, cuando hay rozamiento, o cuando el centro de fuerzas es móvil.

  Pues bien: sólo para los del primer tipo es válido el nuevo principio.

- Finalmente: los resultados anteriores se han obtenido para *masas puntuales*. Es previsible que el resultado también sea válido para sólidos. El trabajo, concluye Euler, «... lo dejo para otros...».

“El caso König” (1751) y sus implicaciones, en relación con Maupertuis, Euler y el PMA

- 1751: Con Maupertuis y Euler en la Academia de Berlín —armonía entre ambos—, estalla el famoso «caso König», que involucrará a Euler. El protagonista: Samuel König (1712-1757), antiguo discípulo de los Bernoulli, estudioso de Newton y de Leibniz, y miembro de la Academia de Berlín, desde 1749, ¡a propuesta de Maupertuis!
- König hace pública una nota en la que, además de criticar la validez del PMA, acusa a su protector Maupertuis de apropiarse de ideas precedentes —en relación con el PMA— de Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716); ideas que éste, según König, comunicó por escrito al matemático suizo Jakob Hermann (1678-1733), con el que Euler coincidió unos años en San Petersburgo.
- La Academia de Berlín interviene a favor de su presidente; como primera providencia, pide la carta original de Leibniz a Hermann.

- Dado que la carta no apareció —König sólo pudo aportar una copia, de dudoso origen—, y sin pruebas convincentes de su existencia, König fue acusado de engaño y repudiado.
- Con el beneplácito de la Academia, Euler escribe "Exposé concernant l'examen de la lettre de M. Leibniz"; además de poner de manifiesto la falsificación, expone su posición ante el PMA.
- "El caso König" tuvo otras repercusiones:
  - König se ve obligado a dimitir de la Academia, tratando de buscar argumentos para justificar su denuncia y su actitud.
  - Voltaire se inmiscuye en la polémica, a favor de König, publicando *Diatribe du docteur Akakia, médecin du pape*; un panfleto de fuerte carga satírica contra Euler y Maupertuis.
  - También interviene Federico II, a favor de Maupertuis y contra el panfleto —que ordenó retirar y quemar— de Voltaire; éste rompió definitivamente sus amistosas relaciones con el rey.
  - Maupertuis quedó muy resentido de toda la polémica; de hecho, ya nunca se recuperó (murió siete años después).

Samuel König (1712-1757)

Leonhard Euler (1707-1783)

Más sobre Maupertuis, Euler, Lagrange y el PMA

- Los enunciados de Maupertuis (luz) y de Euler (mecánica), ambos de 1744, de ninguna forma pueden considerarse equivalentes.
- En su famoso *Methodus...* (1744) Euler no se refiere a Maupertuis.
- Maupertuis, en «Les lois du mouvement et du repos» (1746):

«*Yo enuncié el principio... en la sesión pública de la Real Academia de Ciencias de París del 15 de abril de 1744... El profesor Euler publicó a finales del mismo año su excelente libro* ***Methodus inveniendi lineas curvas maximimi minive propietate gaudentes****. En el suplemento allí adjunto, este ilustre geómetra demuestra que: en la trayectoria descrita por un cuerpo sometido a fuerzas centrales, la velocidad multiplicada por el elemento de curva es siempre un* ***mínimo****. La observación me causó gran placer, por cuanto es una bella aplicación de mi principio al movimiento de los planetas; así dicho principio constituye la regla.*

- Tal vez con excesiva generosidad, y sin completa justificación, Euler siempre adjudicó a Maupertuis la paternidad del PMA.
- Nuevo enunciado de Maupertuis, en 1746 (¿espoleado por Euler?): «*Cuando un cambio ocurre en la Naturaleza, la cantidad de acción* [masa de un cuerpo por su velocidad y por el espacio recorrido] *necesaria para ese cambio es la más pequeña posible*».
- Carta de Euler a Lagrange (9/11/1762), tras conocer los nuevos refinamientos de éste acerca del PMA, y del cálculo de variaciones:

  «¡Qué satisfacción habría tenido el Señor de Maupertuis, si todavía viviera, al ver **su** principio de mínima acción transportado al más alto grado de dignidad posible»
- Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813) justifica en 1788, en su *Mécanique analityque*, el nombre de PMA para su nuevo resultado, de mayor calado y generalidad que los precedentes, «par analogie avec celui que Maupertuis avait donné sous cette dénomination et que les écrits de plusieurs auteurs illustres ont rendue ensuite si fameux».

OTROS SOBRE EULER

- Marqués de Condorcet (Obituario, 1783, París):
  «Uno de los hombres más grandes y más extraordinarios que jamás produjo la naturaleza, cuyo talento fue igualmente capaz de los mayores esfuerzos y del trabajo continuo. Multiplicó sus producciones más de lo que se pudiera esperar de las fuerzas humanas y, sin embargo, fue original en todas».

- Algunas citas de matemáticos famosos, muy difundidas:
  - «Leed a Euler, leed a Euler. Él es el maestro de todos nosotros».
    Simon Laplace
  - «El estudio de los trabajos de Euler sigue constituyendo la mejor instrucción en las distintas partes de las matemáticas y no puede sustituirse por nada».
    Carl Friedrich Gauss
  - «Ningún matemático alcanzó tal posición de indiscutible liderazgo en todas las ramas de las matemáticas, puras y aplicadas, como la tuvo Euler durante la mayor parte del siglo XVIII».
    André Weil

Principios variacionales, siglos XVII-XVIII: resumen

Fermat, 1662	- Tiempo mínimo, para la luz.
Leibniz, 1682	- «Camino más simple», para la luz.
Maupertuis, 1744	- PMA, para la luz.
Euler, 1744	- PMA, en mecánica: $\delta\int_{q_1}^{q_2} m\,u\,\mathrm{d}q = \delta\int_{t_1}^{t_2} 2T\,\mathrm{d}t = 0$
Maupertuis, 1746	- PMA, en mecánica.
Lagrange, 1766	- Generalización (a sistemas) y refinamientos varios.
Hamilton, 1835	- *Principio de Hamilton*: $\delta\int_{t_1}^{t_2} (T - V)\,\mathrm{d}t = 0$
Jacobi, 1842	- *Principio de* (*Hamilton*–) *Jacobi*: $\delta\int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{H - V}\,\mathrm{d}\rho = 0$

OTROS COMENTARIOS

- En el *Methodus*, capítulo II, proposición III:

La curva que maximiza o minimiza $\int Z(x,y,p)dx$, donde $p \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,

y $\mathrm{d}Z = M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}p$, es solución de $N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = 0.$

- Este resultado, cuando Z es el lagrangiano $L(t,q,\dot{q})$, conduce a las

conocidas ecuaciones de Euler-Lagrange: $\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0.$

- En el *Additamentum II*, el PMA se refiere al caso particular $Z = 2T$.
- Si, como es usual, se supone además la conservación de *T*+*V*, el PMA implica entonces, como consecuencia de una simple resta,

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T - V)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{(Principio de Hamilton)}$$

PRINCIPALES FUENTES CONSULTADAS

- **EULER, L**. (1993): *Método de máximos y mínimos*. Selección del Methodus (1744), con introducción, traducción, notas y apéndices a cargo de Albert Dou. UAB i UPC, Barcelona.
- **YOUSCHKEVITCH, A.P**.: "Leonhard Euler", en *Dictionary of Scientific Biography*, vol. IV, pp. 467-484. (Edición de Ch. C. Gillispie,14 vols. 1970-1981). Ch. Scribner's Sons, New York.
- **DUNHAM, W**. (2000): *Euler, el maestro de todos los matemáticos.* Nivola, Madrid (Edición original: 1999)
- **BRADLEY, R.E. and SANDIFER, C.E. (eds.)** (2007): *Leonhard Euler: life, work and legacy*. Elsevier, Amsterdam.
- **BRUNET, P.** (1938): *Étude historique sur le principe de la moindre action*. Hermann, Paris.
- **LANCZOS, C.** (1986): *The variational principles of mechanics*. Dover, New York. (Edición original: 1949).
- **GOLDSTINE, H.H.** (1980): *A history of the calculus of variations, from the 17th through the 19th century*. Springer-Verlag, New York.

FINALMENTE: EULER *ON-LINE* Y... MÁS

- The Euler archive: http://www.math.dartmouth.edu/~euler
- Acceso *on-line* a un total de 866 trabajos a través de: http://www.math.dartmouth.edu/~euler/enestrom.html
- Web oficial del tri-centenario: http://www.euler-2007.ch/